УДК 62.5

В.С. Дмитренко, канд. техн. наук,
Л.Л. Прокофьева

# ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛИ, ФОРМИРУЮЩЕЙ ЗАДАННЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРИ СИНТЕЗЕ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

*Розглянуто підхід щодо аналітичної побудови еталонної моделі динамічного об'єкта в разі синтезу систем управління, що само настроюються. Отримано залежності, які визначають еталонну модель на основі функції Ляпунова для випадку параметричного налаштування систем управління, що само настроюються.*

*Рассмотрен подход к аналитическому построению эталонной модели динамического объекта в задаче синтеза самонастраивающихся систем управления. Получены зависимости, определяющие эталонную модель на основе функции Ляпунова для случая параметрической настройки самонастраивающейся системы управления.*

*Approach to analytical construction of standard model of dynamic object in the task of synthesis of the which is adjusted control systems is considered. Dependences determining a standard model on the basis of the Lyapunov function for the case of the parametrical tuning of the which is adjusted control system are got.*

Для решения задач управления в условиях значительных изменений характера входных сигналов или параметров объекта успешно используются адаптивные, в частности, самонастраивающиеся системы (СНС). В случае, если затруднительно или невозможно организовать поиск желаемого управления итерационным способом (перебором пробных управлений) перспективными можно рассматривать СНС с эталонной моделью (ЭМ), которые реализуют беспоисковый способ синтеза управления.

Самонастраивающиеся система с ЭМ состоит из основной системы и контура настройки. Основная система (иначе — обобщенный объект) представляет собой совокупность объекта управления (ОУ) и исполнительного устройства (ИУ). В контур настройки входят ЭМ и управляющее устройство (УУ) — суть регулятор.

Под задачей синтеза СНС понимается [3] определение алгоритма функционирования УУ, т.е. его структуры и параметров, при известных уравнениях движения основной системы, ЭМ и характеристик входных сигналов.

Относительно управляемой координаты обобщенный объект управления (ООУ) может описываться уравнением вида

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = \sum_{j=0}^{m} d_j(t) x^{(j)}, \qquad (1)$$

где $x$ – управляющее воздействие; $y$ – выходная координата; $a_i(t)$, $d_j(t)$ – переменные во времени коэффициенты, или в операторной форме

$$A(p,t) \cdot Y(p) = D(p,t) \cdot X(p), \qquad (2)$$

где $A(p,t), D(p,t)$ — линейные дифференциальные операторы.

Линейная математическая модель (ММ) движения объекта относительно расчетной траектории справедлива лишь при определенных ограничениях, накладываемых на сигналы и координаты объекта, диапазоны и скорости изменения его коэффициентов [1]. Указанные ограничения можно записать в виде неравенств

$$B_k\lfloor p, g, y, x, a_i(t), d_j(t), t \rfloor \le 0, \qquad (3)$$

где $B_k$ — некоторые операторы; $g$ — входной сигнал.

С учетом законов управления, справедливых для замкнутой системы, уравнение ООУ принимает вид

$$
\begin{gathered}
y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[a_i(t)+c_i(t)\right]y^{(i)}= \\
=\sum_{j=0}^{m}\left[d_j(t)+c_{xj}(t)\right]x^{(j)}
\end{gathered}. \qquad (4)
$$

Представим перестраиваемые коэффициенты $c_i(t)$ и $c_{xj}(t)$ в виде суммы двух составляющих:

$$
\left.\begin{aligned}
c_i(t)&=\bar{c}_i+\Delta c_i(t); \\
c_{xj}(t)&=\bar{c}_{xj}+\Delta c_{xj}(t),
\end{aligned}\right\}, \qquad (5)
$$

где $\bar{c}_i$, $\bar{c}_{xj}$ — постоянные величины; $\Delta c_i(t)$, $\Delta c_{xj}(t)$ — перестраиваемые составляющие.

Введем обозначения

$$
\left.\begin{aligned}
a_i&=a_i(t)+\bar{c}_i; \\
d_j&=d_j(t)+\bar{c}_{xj},
\end{aligned}\right\}. \qquad (6)
$$

В силу (4) и (5), можно записать

$$
\begin{gathered}
y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[a_i+\Delta c_i(t)\right]y^{(i)}= \\
=\sum_{j=0}^{m}\left[d_j+\Delta c_{xj}(t)\right]x^{(j)}
\end{gathered}. \qquad (7)
$$

Изменения коэффициентов $a_i$ и $d_j$ системы уравнений (7), вызванные изменением параметров ООУ, будут компенсироваться соответствующими изменениями коэффициентов $\Delta\tilde{n}_i(t)$ и $\Delta\tilde{n}_{xj}(t)$ до значений, определяемых ЭМ.

Уравнение ЭМ представим в следующем виде:

$$
y_M^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}b_i y_M^{(i)}=\sum_{j=0}^{m}d_{jM}x^{(j)}, \qquad (8)
$$

где $b_i, d_{jM}$ — независящие от времени коэффициенты уравнения ЭМ.

Если выделить желаемые значения коэффициентов, равные коэффициентам ЭМ, и их дополнительные составляющие, то выражение (4) преобразуется к виду

$$
\begin{gathered}
y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}\left[b_i+\Delta a_i(t)+\Delta c_i(t)\right]y^{(i)}= \\
=\sum_{j=0}^{m}\left[d_{jM}+\Delta d_j(t)+\Delta c_{xj}(t)\right]x^{(j)}
\end{gathered}. \qquad (9)
$$

Отклонение выхода основной системы и модели

$$
\varepsilon=y-y_M \qquad (10)
$$

находят из уравнений (8) и (9):

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}b_i\varepsilon^{(i)}=\sum_{j=0}^{m}\left[\Delta d_j(t)+\Delta c_{xj}(t)\right]x^{(j)}- \\
-\sum_{i=o}^{n-1}\left[\Delta a_i(t)+\Delta c_i(t)\right]y^{(i)}
\end{gathered}. \qquad (11)
$$

Группируя члены в (11), получаем:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^{(\grave{o})}+\sum_{\o=0}^{\grave{o}-1}b_i\varepsilon^{(i)}=\left[\sum_{j=0}^{m}\Delta d_j x^{(j)}-\sum_{i=0}^{n-1}\Delta a_i y^{(i)}\right]+ \\
+\left[\sum_{j=0}^{m}\Delta c_{xj}(t)x^{(j)}-\sum_{i=0}^{n-1}\Delta c_i(t)y^{(i)}\right], \qquad (12)
\end{gathered}
$$

или

$$
\varepsilon^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}b_i\varepsilon^{(i)}=F+u, \qquad (13)
$$

где $F=\left[\sum_{j=0}^{m}\Delta d_j x^{(j)}-\sum_{i=0}^{n-1}\Delta a_i y^{(i)}\right]$ — эквивалентное возмущение, действующее на систему и вызывающее ошибку ε;

$u=\left[\sum_{j=0}^{m}\Delta c_{xj}(t)x^{(j)}-\sum_{i=0}^{n-1}\Delta c_i(t)y^{(i)}\right]$— эквивалентное входное воздействие УУ.

С целью упрощения записей математических выкладок, целесообразно, введя обозначение

$$
\varepsilon^{(i)}=x_{i+1} \qquad (i=0,1,2,...,n), \qquad (14)
$$

представить уравнение ошибки (13) в матричной форме

$$
\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{AX}+\mathbf{U}, \qquad (15)
$$

где

$$\mathbf{X}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix}; \quad \mathbf{A}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_{n-1} \end{Vmatrix}; \quad U=\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_0 \end{Vmatrix}.$$

Задача синтеза СНС может быть сведена в этом случае к выбору такого управления, при котором происходит компенсация эквивалентного возмущения $F$.

Решение этой задачи может усложняется неавтономностью системы, поскольку правая часть ее уравнения (12) явно зависит от времени. Второй метод Ляпунова [2], устанавливающий достаточные условия устойчивости, позволяет успешно преодолеть указанную трудность. Однако важной является и задача обеспечения требуемого качества управления.

С целью упрощения решения вопросов оптимизации можно предполагать, что выполняются условия автономности системы. При этом имеется в виду, что в СНС с ЭМ и комбинированной настройкой допущение об автономности рассматриваемых систем является возможным при достаточно широком диапазоне изменения условий их работы.

Покажем возможность применения полученной модели в практических приложениях. Сущность методики синтеза СНС с ЭМ и параметрической настройкой на основе функций Ляпунова рассмотрим на примере построения системы второго порядка.

Положим, что ООУ и ЭМ описываются уравнениями второго порядка

$$\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_0 y=kk_c g; \tag{16}$$

$$\ddot{y}_M+b_1\dot{y}_M+b_0 y_M=k_M g, \tag{17}$$

где $k$ – переменный во времени коэффициент ООУ; $k_c$ – перестраиваемый коэффициент усиления системы; $k_M$ – коэффициент усиления модели; $g$ – входной сигнал; $a_i=b_i$.

Необходимо найти алгоритм настройки коэффициента усиления $k_c$ из условия устойчивости переходных процессов в системе.

Вычитая из уравнения (16) уравнение (17) и вводя обозначение

$$\varepsilon^{(i)}=y_M^{(i)}-y^{(i)} \qquad (i=0,1,2), \tag{18}$$

составим уравнение ошибки

$$\ddot{\varepsilon}+b_1\varepsilon+b_0\varepsilon=(k_M-k_c k)g, \tag{19}$$

или

$$\ddot{\varepsilon}+b_1\dot{\varepsilon}+b_0\varepsilon=\gamma g, \tag{20}$$

где

$$\gamma=k_M-k_c k. \tag{21}$$

Выберем функцию Ляпунова в виде квадратичной положительно определенной формы фазовых координат и разности коэффициентов усиления

$$V=\dot{\varepsilon}^2+b_0\varepsilon^2+\lambda\gamma^2, \tag{22}$$

где $\lambda$ — положительная постоянная.

Полная производная по времени функции (22) имеет вид

$$\frac{dV}{dt}=2\ddot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}+2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon+2\lambda\dot{\gamma}\gamma. \tag{23}$$

Выразим из (20) вторую производную ошибки системы

$$\ddot{\varepsilon}=g\gamma-b_1\dot{\varepsilon}-b_0\varepsilon \tag{24}$$

и, подставляя ее в (23), получим

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=2\dot{\varepsilon}g\gamma-2b_1\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon}-2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon+2\lambda\dot{\gamma}\gamma=\\&=2\left(\dot{\varepsilon}g\gamma-b_0\dot{\varepsilon}^2+\lambda\dot{\gamma}\gamma\right)\end{aligned}. \tag{25}$$

Как видно из (25), для обеспечения неположительности производной функции Ляпунова, т.е. достижения устойчивости процесса настройки (иными словами, ошибка системы не возрастает), достаточно обеспечить выполнение условия

$$2\left(\dot{\varepsilon} g\gamma + \lambda\dot{\gamma}\gamma\right) \le 0 \,.$$

Из последнего неравенства следует:

$$\dot{\gamma} \le -\frac{\dot{\varepsilon} g}{\lambda}\,. \tag{26}$$

С другой стороны, из (21), в предположении квазистационарного изменения коэффициента $k$, можно получить:

$$\dot{\gamma} = -kk_c\,. \tag{27}$$

Выражения (26) и (27) позволяют определить алгоритм настройки, а именно:

$$k_c \ge \frac{1}{k\lambda}\dot{\varepsilon} g\,. \tag{28}$$

Проведенные дополнительные исследования показали, что рассмотренная методика может быть использована для синтеза алгоритмов и законов формирования перестраиваемых параметров и в более общем случае, когда динамика ООУ и ЭМ описывается дифференциальными уравнениями высоких порядков, а также с переменными коэффициентами.

Список использованной литературы


1. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления /В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов.– М.: Высш. шк., 1989. 447 с.
2. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения / Ляпунов А.М. – М.: Наука, 1987.– 361с.
3. Чураков Е.П. Оптимальные и адаптивные системы / Чураков Е.П. – М.: Энергоатомиздат, 1987.– 256 с.



Получено 23.09.2009



Дмитренко
Василий Степанович
канд. техн. наук,
Одесск. нац.
политехн. ун-т
тел. 734-84-36



Прокофьева
Людмила Леонидовна,
ст. преп. каф.
“Компьютеризированные
системы управления”.